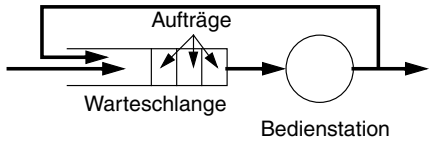
4 **Prozessorvergabe in Monoprozessoren**

4.1 **Die operationelle Methode**

Mehrere Aufträge (Prozesse) werden im Zeitmultiplex von einem Prozessor bearbeitet:



❑ **Frage: Welchen Einfluß übt die Auswahl-(Zuordnungs-)Strategie auf Verweilzeiten und Durchsatz aus?**

❑ **Systembeschreibung bei operationeller Betrachtung:**
Abarbeitung der Aufträge wird durch Warte- und Bedienfunktionen beschrieben.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

❑ **Wartefunktion:**

$$W_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls der Auftrag } P_i \text{ während des Intervalls} \\ & [t\Delta t, (t+1)\Delta t) \text{ auf Bedienung wartet,} \\ & \text{aber nicht bearbeitet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

❑ **Bedienfunktion:**

$$R_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls der Auftrag } P_i \text{ während des Intervalls} \\ & [t\Delta t, (t+1)\Delta t) \text{ bedient wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nebenbedingung 1

$$\forall i (1 \le i \le n \Rightarrow \exists t ((0 \le t < T \wedge (R_i(t) = 1)) \wedge \forall t (0 \le t < T \Rightarrow (W_i(t) R_i(t) = 0))))$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

❑ **Abgeleitete Begriffe**

◆ **Gesamtwartezeit des Auftrags P_i:**

$$W_i := \sum_{t'=0}^{T-1} W_i(t')\Delta t$$

◆ **Gesamtbedienzeit des Auftrags P_i:**

$$R_i := \sum_{t'=0}^{T-1} R_i(t')\Delta t$$

◆ **Restbedienzeit von P_i zum Zeitpunkt t:**

$$\vec{R}_i(t) := \sum_{t'=t}^{T-1} R_i(t')\Delta t$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

◆ **Von P_i zum Zeitpunkt t verbrachte Wartezeit:**

$$\overleftarrow{W}_i(t) := \sum_{t'=0}^{t-1} W_i(t')\Delta t$$

◆ **Restbedienzeit der zum Zeitpunkt t wartenden Aufträge:**

$$W\vec{R}(t) := \sum_{i=1}^{n} W_i(t)\vec{R}_i(t)$$

◆ **Bisherige Wartezeit der zum Zeitpunkt t bedienten Aufträge:**

$$R\overleftarrow{W}(t) := \sum_{i=1}^{n} R_i(t)\overleftarrow{W}_i(t)$$

◆ **Mittlere Restbedienzeit für die wartenden Aufträge:**

$$W\vec{R} := \frac{1}{T}\sum_{t'=0}^{T-1} W\vec{R}(t')$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

- **Mittlere bisherige Wartezeit der in Bedienung befindlichen Aufträge:**

$$\overleftarrow{RW} := \frac{1}{T}\sum_{t'=0}^{T-1} \overleftarrow{RW}(t')$$

- **Analog werden $\overrightarrow{RW}$, $\overleftarrow{WR}$ und $\overrightarrow{RR}$ definiert.**

- **Zahl der zum Zeitpunkt t wartenden Aufträge (= Warteschlangenlänge):**

$$Q(t) := \sum_{i=1}^{n} W_i(t)$$

- **Mittlere Warteschlangenlänge:**

$$E[Q] := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} Q(t)$$

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

- **Mittlere Wartezeit:**

$$E[W] := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i$$

- **Mittlere Ankunftsrate: (= 1/mittleres Ankunftsintervall)**

$$\lambda := \frac{n}{T\Delta t}$$

- **Zahl der zum Zeitpunkt t im System befindlichen Aufträge:**

$$N(t) := \sum_{i=1}^{n} (W_i(t) + R_i(t))$$

- **Mittlere Zahl der im System befindlichen Aufträge:**

$$E[N] := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} N(t)$$

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

- **Verweilzeit des Auftrags P_i:**

$$U_i := \sum_{t=0}^{T-1} (W_i(t) + R_i(t))\Delta t$$

- **Mittlere Verweilzeit:**

$$E[U] := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i$$

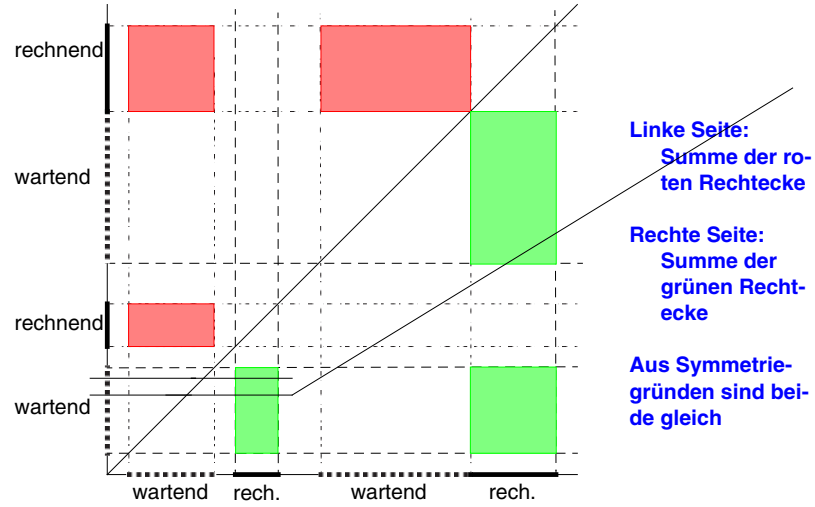
Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S4.1 **Satz**

1. $\overrightarrow{WR} = \overleftarrow{RW}$
2. $\overrightarrow{RW} = \overleftarrow{WR}$
3. $\overrightarrow{RR} = \frac{1}{2T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i(R_i + \Delta t)$
4. $\overleftarrow{RW} + \overrightarrow{RW} = \frac{1}{T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} W_i R_i$

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Beweis zu $\vec{WR} = \overleftarrow{RW}$: Betrachtung eines einzelnen Prozesses



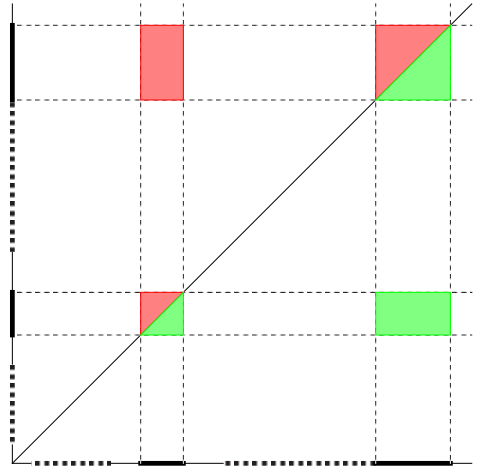
Linke Seite:
Summe der roten Rechtecke

Rechte Seite:
Summe der grünen Rechtecke

Aus Symmetriegründen sind beide gleich

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Beweis zu $\vec{RR} = \frac{1}{2T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i(R_i + \Delta t)$

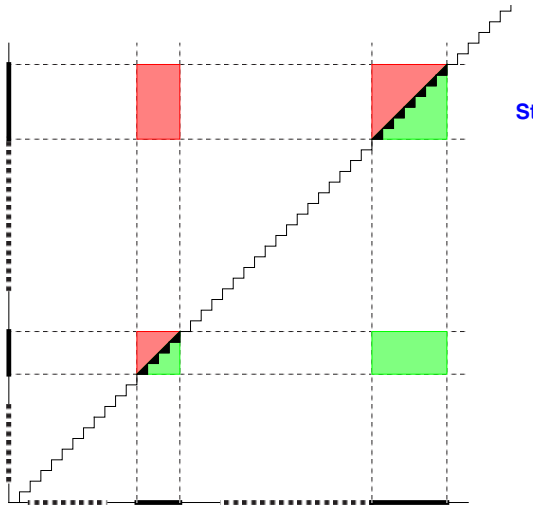


Linke Seite
Summe der roten Flächen

Im Grenzfall $\Delta t \to 0$
Summe der roten Flächen = Summe der grünen Flächen

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

genauer

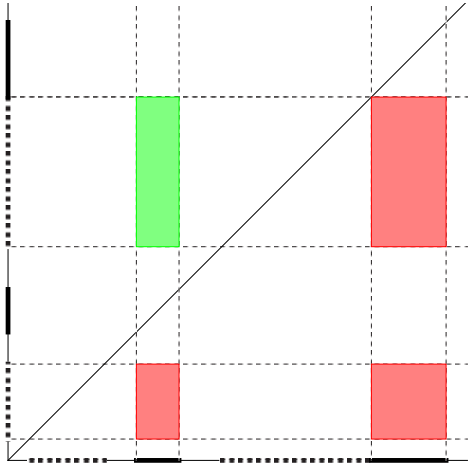


Stufe = Δt

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

$$\overleftarrow{RW} + \vec{RW} = \frac{1}{T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} W_i R_i$$

Beweis zu



Linke Seite:

1. Summand = Summe der roten Flächen

2. Summand = Summe der grünen Flächen

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S4.2

Theorem von Little

1. $E[Q] = \lambda E[W]$
2. $E[N] = \lambda E[U]$

Beweis:

Einfache Umformungen der Definitionen

Bezeichnungen

Ankunftszeitpunkt des Auftrags P_i

$$a_i := \min_{0 \le t < T} \{t | W_i(t) + R_i(t) \neq 0\}$$

Fertigstellungszeitpunkt des Auftrags P_i

$$e_i := \max_{0 \le t < T} \{t | R_i(t-1) = 1\}$$

Nebenbedingung 2

$$\forall i \forall t (0 \le t < T \Rightarrow (a_i \le t < e_i \Leftrightarrow (W_i(t) + R_i(t) = 1)))$$

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S4.3

Kleinrock

Das System verfüge über eine einzige Bedienstation. Dann hat für alle Strategien, die

1. **nicht verdrängend sind (d. h. $R\vec{W} = 0$),**
2. **die Bedienstation nur unbenutzt lassen, wenn keine Aufträge im System sind und**
3. **Ankunfts- und Bedienzeiten nicht beeinflussen,**

die Größe $\sum_{i=1}^{n} R_i W_i$ den gleichen Wert.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Beweis:

1. **$\vec{R}(t) := W\vec{R}(t) + R\vec{R}(t)$ ist unter den gemachten Voraussetzungen ein sägezahnähnlicher Treppenzug, dessen Form unabhängig von der Zuordnungsstrategie ist.**
2. **Da nach Annahme R_i unabhängig von der Strategie ist, gilt dies wegen Satz 3.1 auch für $R\vec{R}$**
3. **Wegen 1. ist auch der Mittelwert $\vec{R} = W\vec{R} + R\vec{R}$ strategie-unabhängig und damit wegen 2. auch $W\vec{R}$. Aufgrund von Satz 3.1 gilt dies dann auch für $R\overleftarrow{W}$.**
4. **Nach Voraussetzung ist die Strategie nicht verdrängend, also $R\vec{W} = 0$.**

   Mit Satz 3.1 ergibt sich $RW = R\overleftarrow{W} + R\vec{W} = \frac{i}{T\Delta t} \sum_{i=1}^{n} R_i W_i$, woraus wegen 3. die Behauptung folgt.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S4.4

Satz: Minimierung der mittleren Verweilzeit bei nicht verdrängenden Strategien

In einem System mit einer Bedienstation, das zum Zeitpunkt 0 bereits alle Aufträge enthält (d. h. für alle i ist $R_i(0) + W_i(0) = 1$) und das keine Verdrängung zuläßt, wird die mittlere Verweilzeit minimiert, wenn die Aufträge nach aufsteigenden Bedienzeitanforderungen abgearbeitet werden. Solche Vorgehensweisen werden als *shortest job first (SJF)* bezeichnet.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S4.5 **Satz: Minimierung der mittleren Verweilzeit bei verdrängenden Strategien**

In einem System mit einer Bedienstation, das n Aufträge zu bearbeiten hat, minimiert die Strategie *preemptive shortest job first (PSJF)* die mittlere Verweilzeit, falls Verdrängung und Zuordnung von Aufträgen keine Zeit beanspruchen.

L4.5.1 **Lemma**

Eine Strategie S, die die mittlere Verweilzeit minimiert, erzeugt keine Leerstellen, d. h. in jedem Intervall $[t_1, t_2)$ ist ein Auftrag in Bearbeitung, falls während dieses Intervalls immer Aufträge im System sind.

L4.5.2 **Lemma**

Eine Strategie S, die U minimiert, erzeugt höchstens zu den Ankunftszeitpunkten a_i Verdrängungen.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Bezeichnung

Jedem Auftrag sei ein Zielzeitpunkt z_i zugeordnet, zu dem spätestens seine Fertigstellung erfolgen sollte.

S4.6 **Satz: Minimierung der maximalen Verspätung ohne Verdrängung**

Ein System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation, das zum Zeitpunkt 0 bereits alle Aufträge enthält und keine Verdrängung zuläßt, minimiert die maximale Verspätung $\max_i\{L_i | (L_i = e_i - z_i)\}$, wenn die Aufträge nach aufsteigender Zielzeit z_i abgearbeitet werden *(deadline scheduling, earliest deadline first, EDF)*.

S4.7 **Satz: Minimierung der maximalen Verspätung mit Verdrängung**

In einem System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation wird $\max_i\{L_i | (L_i = e_i - z_i)\}$ minimiert, wenn zu jedem Zeitpunkt unter den im System vorhandenen Aufträgen einer mit kleinstem Zielzeitpunkt zugeordnet wird *(preemptive deadline scheduling, preemptive earliest deadline first, PEDF)*.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Beweis: S sei ein Ablaufplan gemäß PEDF

O. B. d. A. Numerierung so, daß $i < j \Leftrightarrow z_i < z_j \vee (z_i = z_j \wedge e_i < e_j)$

k sei kleinster Index mit L_k maximal

1) Für alle i $L_i \le L_k \Rightarrow e_i - z_i \le e_k - z_k \Rightarrow z_k - z_i \le e_k - e_i$

2) $i < k \Rightarrow z_i \le z_k \Rightarrow 0 \le z_k - z_i \le e_k - e_i \Rightarrow e_i \le e_k$

   $i \ne k$: $\Rightarrow e_i < e_k$

3) Beh.: Teilsystem $P_1, P_2, ..., P_k$ abgearbeitet wie S ist in diesem Teilsystem ebenfalls eine Abarbeitung nach PEDF; es ist lediglich zu zeigen, daß in dem Teilsystem keine Lücken entstehen.

   Nach Definition der Indizierung: $k < r \Rightarrow z_k < z_r \vee (z_k = z_r \wedge e_k < e_r)$

   Im ersten Fall wird P_r nur in Intervallen bearbeitet, während derer kein Auftrag des Teilsystems im System ist,

   im zweiten Fall hätte P_r eine größere Verspätung als P_k, so daß er nicht eintreten kann.

Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig