## 4.2 Die analytische Methode

### 4.2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

- Ist X eine zufällige Größe, so bezeichnet P[X<x] die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein zufällig beobachteter Wert von X kleiner als x ist. Im weiteren wird stets vorausgesetzt, daß P[X<0] = 0 ist.
- Unter der Verteilungsfunktion einer zufälligen Größe X wird die Funktion F(x) mit P[X<x] = F(x) verstanden,

  unter der Dichte die Funktion $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$.
- Unter dem n-ten Moment $E[X^n]$ einer zufälligen Größe X wird der Wert $\int_0^\infty x^n dF(x)$

  verstanden. Das erste Moment wird auch als Mittelwert von X bezeichnet.
- P[X<x | B(X)] bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis, das die Bedingung B erfüllt, einen Wert kleiner als x hat.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




**S4.8 Satz: Gedächtnislosigkeit und Exponentialverteilung**

Eine Folge zufälliger Ereignisse habe die Eigenschaft gedächtnislos zu sein, d. h. daß für hinreichend kleine Zeitintervalle $\Delta t$ in einem Intervall höchstens ein Ereignis eintritt und zwar mit der von t unabhängigen Wahrscheinlichkeit $\lambda(\Delta t) + o(\Delta t)$ . Dann gilt für die Zeitintervalle X zwischen zwei Ereignissen:

$P[X<x] = 1-e^{-\lambda x}$ (*Exponential-Verteilung*).

Für Exponentialverteilungen ist $E[X] = 1/\lambda$ und $E[X^2] = 2/\lambda^2$.

**S4.9 Satz**

Für Exponentialverteilungen gilt: $P[X < x_0+x \mid X \geq x_0] = P[X < x]$.

**S3.10 Satz: Poisson-Verteilung**

Für eine Ereignisfolge mit exponentieller Verteilung $1-e^{-\lambda x}$ der Intervalle zwischen zwei Ereignissen, kurz als Zwischenintervalle bezeichnet, gilt für die Zahl N(t) der im Intervall [0, t) eintretenden Ereignisse:

$$P[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$ (*Poisson-Verteilung*).


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**S4.11** **Satz: Zusammenführung und Trennung von Exponentialverteilungen**

1. **Führt man n Ereignisfolgen mit Zwischenintervallverteilungen $1 - e^{-\lambda_i t}$ $(1 \le i \le n)$ zu einer einzigen Ereignisfolge zusammen, so entsteht eine Ereignisfolge mit Zwischenintervallverteilung $1 - e^{-\lambda t}$, wobei $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ ist.**

2. **Teilt man eine Ereignisfolge mit Zwischenintervallverteilung $1 - e^{-\lambda t}$ in der Art in n Ereignisfolgen auf, daß die Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit $\beta_i$ in die i-te Folge eingereiht werden, so sind die Zwischenintervalle in der i-ten Ereignisfolge gemäß $1 - e^{-\beta_i \lambda t}$ verteilt.**


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




**D4.1** **Definition: Laplace- bzw. Z-Transformierte**

1. **Die *Laplace-Transformierte* $F^*(z)$ einer kontinuierlichen Verteilungsfunktion F(t) mit der Dichtefunktion $f(t) = F'(t)$ ist definiert durch**

$$F^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dF(t) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \ .$$

2. **Die *Z-Transformierte* $X^*(z)$ einer diskreten Verteilung $p_j = P[X=j]$ ist definiert durch**

$$X^*(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j .$$

**S4.12** **Satz**

**Seien $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhängige, nichtnegative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktionen $F_j(x)$ und sei $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ mit Verteilungsfunktion F(x).**


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**Dann gilt sowohl im diskreten als auch im kontinuierlichen Fall:** $F^*(z) = \prod_{i=1}^{n} F_i^*(z)$

**S4.13 Satz**

**Eine Verteilungsfunktion ist eindeutig durch ihre Transformierte bestimmt und umgekehrt.**

## 4.2.2 Einfache Modelle

- **Kendallsche Notation**

  Ankunftsintervallverteilung / Bedienzeitverteilung / #Bedieneinheiten - Auswahlstrategie

- **Kennbuchstaben für Verteilungen**

  **M Exponentialverteilung**

  **G allgemeine Verteilung**


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




- **Beispiel**

  **M/M/1-FCFS**

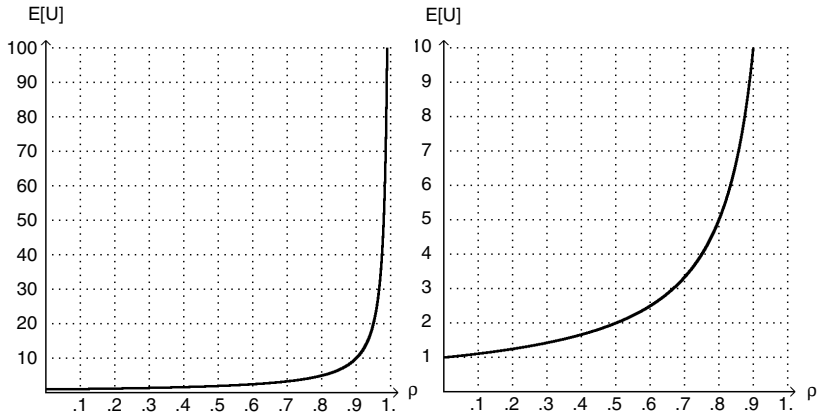
  System mit einer Bedieneinheit, wobei Ankunftsintervalle und Bedienzeiten exponentiell verteilt sind und die Aufträge in der Reihenfolge ihrer Ankunft (First Come First Served) abgearbeitet werden.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

S4.14 **Satz: M/M/1-FCFS**

**Sind in einem System mit einer Bedienstation die Ankunftsintervalle gemäß $1 - e^{-\lambda t}$ und die Bedienzeiten gemäß $1 - e^{-\mu t}$ verteilt, so gilt für die mittlere Zahl E[N] von unerledigten Aufträgen bei Verwendung der Strategie 'first-come-first-served':**

$$E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \textbf{mit } \rho = \frac{\lambda}{\mu} .$$




**Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit E[U] von der Auslastung ρ bei *M/M/1-FCFS* (als Zeiteinheit wurde die mittlere Bedienzeit gewählt)**

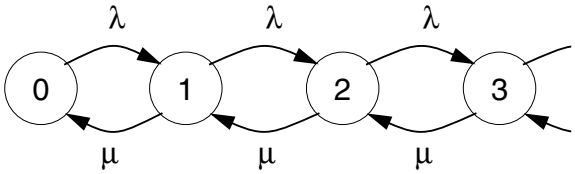

Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




Beweis

Systemzustand charakterisiert durch Zahl der im System befindlichen Aufträge.

Übergangswahrscheinlichkeiten




Daraus folgt:

$$p_0\lambda = p_1\mu$$

$$p_{i-1}\lambda + p_{i+1}\mu = p_i(\lambda + \mu) \text{ für } i \geq 1$$

Betrachtung der Z-Transformierten führt zu

$$P^*(z) = \frac{\mu p_0 - \frac{\mu}{z} p_0}{\lambda + \mu - \frac{\mu}{z} - \lambda z} = p_0 \frac{1}{1-\rho z}$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

Wegen $P^*(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ folgt $p_0 = 1 - \rho$.

Einsetzung ergibt $P^*(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$ und somit

$$E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = P^{*\prime}(z)\big|_{z=1} = \frac{(1-\rho)\rho}{(1-\rho z)^2}\bigg|_{z=1} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




**S4.15** **(M/M/k-FCFS)**

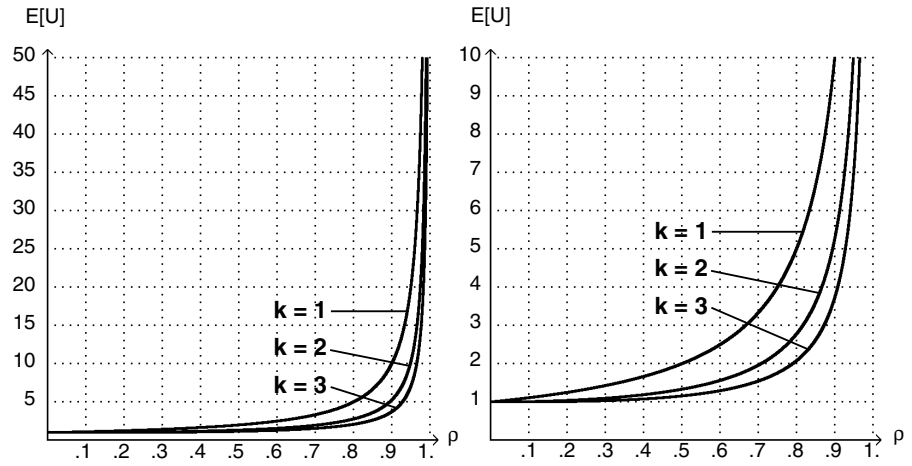
**Es sei ein System mit einer Warteschlange und k identischen Bedienstationen gegeben so, daß jede Station jeden Auftrag in der gleichen Zeit abwickeln kann. Die Ankunftsintervalle seien gemäß $1 - e^{-\lambda x}$ verteilt und die Bedienzeiten gemäß $1 - e^{-\mu x}$. Die Zuteilung erfolge nach der Strategie 'first-come-first-served'.**
**Dann gilt für die mittlere Zahl E[N] von unerledigten Aufträgen:**

$$\mathbf{E[N]} = k\rho + p_0 \frac{\rho(k\rho)^k}{k!(1-\rho)^2}$$

$$\mathbf{mit}\ p_0 = \left( \frac{(k\rho)^k}{k!(1-\rho)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k\rho)^i}{i!} \right)^{-1}$$

**und** $\rho = \lambda/(k\mu)$ **.**


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit E[U] von der Auslastung ρ bei *M*/*M*/k-*FCFS* (als Zeiteinheit wurde die mittlere Bedienzeit gewählt)


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




**S4.16 (M/G/1-FCFS; Pollaczek/Khinchine-Formel)**

Es sei ein System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation gegeben. Die Ankunftsintervalle seien gemäß $1 - e^{-\lambda x}$ und die Bedienzeiten beliebig verteilt. Die Zuteilung erfolge nach der Strategie 'first-come-first-served'.

Bezeichnet man mit S die Zufallsvariable der Bedienzeiten, so gilt für die mittlere Zahl E[N] von unerledigten Aufträgen:

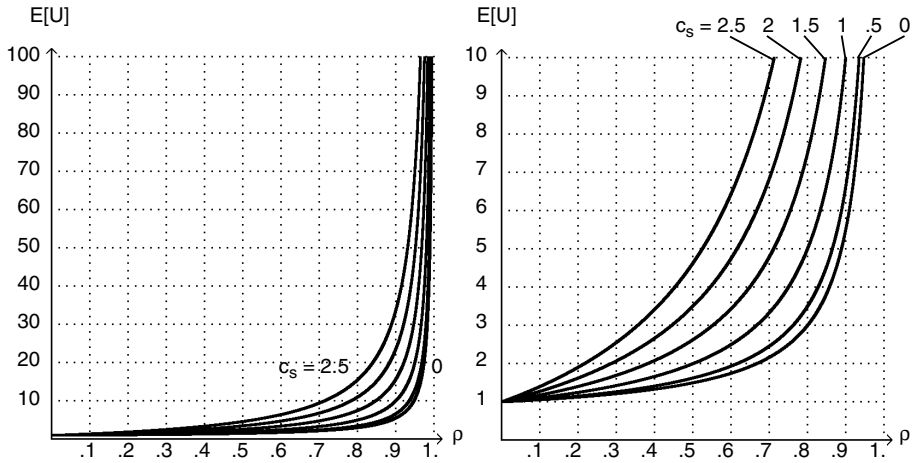
$$E[N] = \rho + \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)} \quad \text{mit } \rho = \lambda E[S] .$$

Definiert man den *Variationskoeffizienten* $c_s$ durch $c_s = (VAR[S])^{1/2}/(E[S])$ , wobei $VAR[S] = E[S^2] - E[S]^2$ die Varianz der Bedienzeitverteilung ist, so erhält man unter Verwendung des Theorems von Little

$$E[U] = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{\rho(1+c_s^2)}{2(1-\rho)}\right) \text{ mit } \mu = \frac{1}{E[S]} .$$

Für Exponentialverteilungen hat $c_s$ den Wert 1.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




Abhängigkeit der mittleren Verweilzeit E[U] von der Auslastung ρ bei *M*/G/1-*FCFS* (als Zeiteinheit wurde die mittlere Bedienzeit gewählt)


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




**S4.17 Satz: M/G/1-FCFS**

**In einem M/G/1-System, das nach der Strategie FCFS arbeitet, sei S die Zufallsvariable der Bedienzeit und R die Zufallsvariable für die Zeit, die ein zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt $t_0$ die Bedienstation belegender Auftrag noch benötigt, um seinen gesamten Bedienwunsch abzuwickeln. Ist die Bedienstation zum Zeitpunkt $t_0$ frei, so werde R = 0 gesetzt. Dann gilt:**

$$\mathbf{E[R]} = \frac{\lambda}{2}E[S^2] = \frac{\rho}{2}\frac{E[S^2]}{E[S]} .$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

### 4.2.3 Wartezeiten in Abhängigkeit von der geforderten Bedienzeit

❑ **Die Strategie FCFS**

Wird ein M/G/1 System nach FCFS abgearbeitet, so gilt nach Satz 3.16:

$$E[N] = \rho + \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)}.$$

Nach dem Theorem von Little ist $E[W] = E[N]/\lambda - E[S]$,
also im vorliegenden Fall

$$E[W] = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)}.$$

Für den Spezialfall M/M/1 errechnet man wegen

$E[S] = 1/\mu$ und $E[S^2] = 2/\mu^2$ den Mittelwert

$$E[W] = \frac{2\rho\mu}{2(1-\rho)\mu^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho}.$$





❑ **Die Strategie Round-Robin**

$$E[U(t)] = \frac{t}{1-\rho}.$$

$$E[W(t)] = \frac{t}{1-\rho} - t$$

| | |
|---|---|
| $\sigma$ | Wahrscheinlichkeit, daß zuletzt bearbeiteter Auftrag nicht fertig ist. |
| $g_i$ | Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag $i > 0$ Quanten benötigt. |
| $\pi_j$ | Wahrscheinlichkeit dafür, daß $j$ Aufträge im System sind. |
| $U_k(j)$ | Verweilzeit eines Auftrages, der $k$ Quanten benötigt und bei dessen Ankunft bereits $j$ Aufträge im System sind. |
| $E[U_k]$ | Mittlere Verweilzeit eines Auftrags mit $k$ Quanten Bedienzeitbedarf. |
| $E[D_i(j)]$ | Für den $i$-ten Durchlauf benötigte Zeit (= Wartezeit + ein Bedienquant), wenn bei der erstmaligen Ankunft $j$ Aufträge im System sind. |

## Die analytische Methode: E[W(t)] bei RR

**1.** $g_i = \sigma^{i-1}(1-\sigma)$

**2.** $E[S] = \sum_{i=1}^{\infty}(iQ)g_i = \frac{Q}{1-\sigma}$

**3.** $E[S^2] = Q^2\sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)\sigma^i = Q^2\frac{1+\sigma}{(1-\sigma)^2}$

**4.** $E[U_k] = \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j E[U_k(j)]$

**5.** $E[U_k(j)] = \sum_{i=1}^{k}E[D_i(j)]$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




## Die analytische Methode: E[W(t)] bei RR

**6.** $E[D_{i+1}(j)] = \sigma Q(x/Q-1)+\lambda xQ+Q$

$= \sigma x-\sigma Q+\lambda Qx+Q$

$= (\lambda Q+\sigma)E[D_i(j)]+(1-\sigma)Q\ .$

**7.** $E[D_2(j)] = \lambda QE[D_1(j)]+\sigma jQ+Q$

**8.** $E[D_i(j)] = (\lambda Q+\sigma)^{i-2}E[D_2(j)]+Q(1-\sigma)\frac{1-(\lambda Q+\sigma)^{i-2}}{1-\lambda Q-\sigma}$

**9.** $U_1(j) = D_1(j)$

**10.** $\alpha = \lambda Q+\sigma$

**11.** $E[U_1] = \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j E[D_1(j)]$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

# Die analytische Methode: E[W(t)] bei RR

**12.** $$E[U_k] = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j E[U_k(j)]$$

$$= E[U_1] + \frac{(k-1)Q}{1-\rho} + Q\left(\lambda E[U_1] + E[N] - \frac{\rho}{1-\rho}\right)\frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}$$

**13.** $$E[U_1] = E[Q_r] + E[N_q]Q + Q$$

**14.** $$E[Q_r] = \rho\frac{E[Q^2]}{2E[Q]} = \frac{\rho Q}{2}$$

**15.** $$E[U_1] = (1 - \rho/2 + E[N])Q$$

**16.** $$E[U(t)] = \lim_{Q\to 0} E[U_{t/Q}] = \lim_{Q\to 0}\left(E[U_1] + \frac{t/Q-1}{1-\rho}Q\right)$$

$$= \lim_{Q\to 0}\frac{t/Q-1}{1-\rho}Q = \frac{t}{1-\rho}\,.$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




# Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

- **Nicht verdrängende Abarbeitung nach Prioritäten**

**Ankunftsverteilung der Priorität i:** $1 - e^{-\lambda_i t}$

**Bedienzeitverteilung der Priorität i:** $1 - e^{-\mu_i t}$

**Auslastungsanteil der Priorität i:** $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$

$$E[W_k] = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_{k-1})(1-\beta_k)}\,,$$

**mit** $\beta_0 = 0$ **und** $\beta_i = \sum_{j=1}^{i} \rho_j$ **für** $i > 0$.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**Beweis:**

$E[U_k]$ mittlere Verweilzeit für Aufträge der Priorität k

$E[W_k]$ mittlere Wartezeit für Aufträge der Priorität k

$E[S_k]$ mittlere Bedienzeit für Aufträge der Priorität k

$$E[U_k] = E[W_k] + E[S_k]$$

Man betrachtet einen markierten Auftrag mit Priorität k, der bei seiner Ankunft in den Warteschlangen der Prioritäten i mit $1 \le i \le k$ jeweils $n_i$ Aufträge vorfindet.

$W'_k$ durch diese Aufträge verursachte Wartezeit

$W''_k$ Wartezeit verursacht durch Aufträge, die während der Wartezeit des markierten neu in den Warteschlangen $q_1$ bis $q_{k-1}$ ankommen


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




Dann gilt

$$\begin{aligned} E[W_k] &= E[R] + E[W'_k] + E[W''_k] \\ &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k E[R_k] \right) + E[W'_k] + E[W''_k] \\ &= \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda E[S_k^2] \right) + E[W'_k] + E[W''_k] \; . \end{aligned}$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

# Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Nach Definition ist

$$E[W_k'] = \sum_{i=1}^{k} E[N_i]E[S_i]$$

Anwendung des Theorems von Little mit $\rho_i = \lambda_i E[S_i]$

$$E[W_k'] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E[W_i]E[S_i] = \sum_{i=1}^{k} \rho_i E[W_i].$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




# Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Außerdem gilt

$$E[W_k''] = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i E[W_k]E[S_i] = \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i E[W_k]$$

und somit

$$E[W_k] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2] + \sum_{i=1}^{k} \rho_i E[W_i] + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i E[W_k].$$

Durch Auflösen nach $E[W_k]$ erhält man

$$E[W_k] = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2] + \sum_{i=1}^{k-1} \rho_i E[W_i]}{1 - \sum_{i=1}^{k} \rho_i}.$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

## Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Setzt man $\beta_0 = 0$ und $\beta_i = \sum_{j=1}^{i} \rho_j$ für $i > 0$, so kann man mittels vollständiger Induktion über k zeigen:

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i}{(1-\beta_{i-1})(1-\beta_i)} = \frac{1}{1-\beta_k}.$$

Für $k = 1$ besagt dies nämlich

$$1 + \frac{\rho_1}{(1-\beta_0)(1-\beta_1)} = \frac{1}{1-\beta_1},$$

was trivialerweise richtig ist.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




## Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Unter der Annahme, daß die Aussage für k richtig ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\rho_i}{(1-\beta_{i-1})(1-\beta_i)} &= \frac{1}{1-\beta_k} + \frac{\rho_{k+1}}{(1-\beta_k)(1-\beta_{k+1})} \\ &= \frac{1-\beta_{k+1}+\rho_{k+1}}{(1-\beta_k)(1-\beta_{k+1})} \\ &= \frac{1}{1-\beta_{k+1}}. \end{aligned}$$

Weiter ist $E[W_1] = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_0)(1-\beta_1)}$.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

## Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Gilt zudem für $k \leq n$ die Beziehung $E[W_k] = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_{k-1})(1-\beta_k)}$ ,

so errechnet man $E[W_{n+1}] = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]\right)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\rho_i}{(1-\beta_{i-1})(1-\beta_i)}\right)}{2(1-\beta_{n+1})}$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]\right)\frac{1}{1-\beta_n}}{2(1-\beta_{n+1})} .$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




## Die analytische Methode: E[W(t)] bei Prioritäten

Durch vollständige Induktion ergibt sich somit $E[W_k] = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1-\beta_{k-1})(1-\beta_k)}$ .


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

❑ **Shortest Job First**

$$E[W(t)] = \frac{\lambda}{\mu^2}\left(1 + \lambda t e^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}e^{-\mu t} - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-2}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu^2}(1 - \rho + \rho e^{-\mu t}(1 + \mu t))^{-2}$$

$$= \frac{\rho}{\mu(1 - \rho(1 - e^{-\mu t}(1 + \mu t)))^{-2}} \quad .$$

**Beweis:**

$g_i$ Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag $i > 0$ Quanten benötigt.

$B(t)$ Bedienzeitverteilung

Mit $\lambda_k = \lambda g_k$ und $\rho_k = kQ\lambda g_k$ verhält sich das System wie ein Prioritätensystem.





Es gilt deshalb

$$E[W_k] = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i E[S_i^2]}{2(1 - \beta_{k-1})(1 - \beta_k)}$$

$$= \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda H_{k-1}(S))(1 - \lambda H_k(S))}$$

mit $H_i(S) = \sum_{j=1}^{i} (jQg_j)$.

Setzt man $t = kQ$ und betrachtet den Grenzübergang $Q \to 0$, so ergibt sich

$$E[W(t)] = \frac{1}{2}\lambda E[S^2](1 - \lambda H_{t/Q}(S))^{-2}$$

$$= \frac{1}{2}\lambda E[S^2]\left(1 - \lambda \int_0^t i\,dB(i)\right)^{-2} \quad .$$

# Die analytische Methode: E[W(t)] bei SJF

Im Spezialfall $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$ ergibt sich

$$E[W(t)] = \frac{\lambda}{\mu^2}\left(1 - \lambda\int_0^t x\mu e^{-\mu x}dx\right)^{-2} .$$

Durch partielle Integration erhält man:

$$\int_0^t x\mu e^{-\mu x}dx = -te^{-\mu t} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu t} + \frac{1}{\mu} .$$

Einsetzung in die obige Formel liefert

$$E[W(t)] = \frac{\lambda}{\mu^2}\left(1 + \lambda te^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}e^{-\mu t} - \frac{\lambda}{\mu}\right)^{-2}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu^2}(1 - \rho + \rho e^{-\mu t}(1 + \mu t))^{-2}$$

$$= \frac{\rho}{\mu(1 - \rho(1 - e^{-\mu t}(1 + \mu t)))^2} .$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




# Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

**Multi Level Feed Back (MLFB)**

$$E[W(t)] = \frac{\frac{\lambda}{2}\int_0^t x^2 dB(x) + t^2(1 - B(t))}{\left(1 - \lambda\int_0^t xdB(x) - \lambda t(1 - B(t))\right)^2} + \frac{t}{1 - \lambda\int_0^t xdB(x) - \lambda t(1 - B(t))} - t$$

Für $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$ ermittelt man hieraus

$$E[W(t)] = \frac{1}{\mu}\frac{\rho - (\lambda t + \rho)e^{-\mu t}}{(1 - \rho(1 - e^{-\mu t}))^2} + \frac{t}{1 - \rho(1 - e^{-\mu t})} - t .$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

**Beweis**

$g_i$ Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag $i > 0$ Quanten benötigt.

$W_k$ Wartezeit für Aufträge mit k Quanten Bedienzeit

$W'_k$ Durch diese Aufträge verursachte Wartezeit

$W''_k$ Wartezeit verursacht durch Aufträge, die während der Wartezeit des markierten neu in den Warteschlangen $q_1$ bis $q_{k-1}$ ankommen

$S_k$ Bedienzeit, die ein Auftrag während seiner Verweilzeit in den ersten k Warteschlangen verbraucht

Mit diesen Bezeichnungen ist $E[S_k] = \sum_{i=1}^{k} ((mp)^i Q) g_i + kQ\left(1 - \sum_{i=1}^{k} g_i\right)$.

Weiter gilt $E[W'_k] = \lambda(E[W_k] + (k-1)Q)E[S_{k-1}]$.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




Modifiziert man die Abarbeitung in der Art, daß jeder Auftrag sofort k Quanten zugeteilt bekommt und anschließend nach *MLFB* weiterverfahren wird, so hat dies keinen Einfluß auf die Verweilzeit von Aufträgen mit mehr als k Quanten Bedienzeitbedarf.

Bezeichnet man mit $\bar{W}_i$ (bzw. $\bar{Q}_i$) die Wartezeit für Aufträge in der i-ten Warteschlange (bzw. die Warteschlangenlänge) des neu konstruierten Systems, so gilt

$$E[\bar{W}_1] = E[\bar{R}] + E[\bar{Q}_1]E[\bar{S}_1],$$

wobei $E[\bar{W}_1] = E[W'_k]$ ist und $E[\bar{S}_1] = E[S_k]$.

Unter Benutzung des Theorems von Little folgert man

$$E[\bar{W}_1] = E[\bar{R}] + \lambda E[\bar{W}_1]E[\bar{S}_1].$$

Also ist $E[\bar{W}_1] = \dfrac{E[\bar{R}]}{1 - \lambda E[\bar{S}_1]}$.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

## Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

Sei $\bar{\lambda}_i$ für $i \geq 2$ die Ankunftsrate in der i-ten Warteschlange des neuen Systems, dann gilt

$$\bar{\lambda}_i = \lambda \sum_{j=k+i-1}^{\infty} g_i = \lambda(1 - G(k+i-2))$$

mit $G(j) = \sum_{i=1}^{j} g_i$

und somit

$$E[\bar{R}] = \frac{\lambda}{2}E[S_k^2] + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{\lambda}_i}{2}Q^2$$

$$= \frac{\lambda}{2}E[S_k^2] + \frac{\lambda}{2}Q^2 \sum_{i=0}^{\infty}(1 - G(k+i))$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




## Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

Also ist

$$E[W_k] = E[W_k'] + E[W_k'']$$

$$= \frac{E[\bar{R}]}{1 - \lambda E[\bar{S}_1]} + \lambda(E[W_k] + (k-1)Q)E[S_{k-1}]$$

und weiter

$$E[W_k] = \frac{\lambda E[\bar{R}] + \lambda Q(k-1)E[S_{k-1}]}{(1 - \lambda E[S_{k-1}])(1 - \lambda E[S_k])}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{2}E[S_k^2] + \frac{\lambda}{2}Q^2 \sum_{i=k}^{\infty}(1 - G(i))}{(1 - \lambda E[S_{k-1}])(1 - \lambda E[S_k])} + \frac{\lambda E[S_{k-1}]}{1 - \lambda E[S_{k-1}]}(k-1)Q$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

# Die analytische Methode: E[W(t)] bei MLFB

Der Grenzübergang $Q \to 0$ liefert mit $t = kQ$

$$E[W(t)] = \frac{\frac{\lambda}{2}\int_0^t x^2 dB(x) + t^2(1 - B(t))}{\left(1 - \lambda\int_0^t x dB(x) - \lambda t(1 - B(t))\right)^2} + \frac{t}{1 - \lambda\int_0^t x dB(x) - \lambda t(1 - B(t))} - t.$$

Für $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$ ermittelt man hieraus

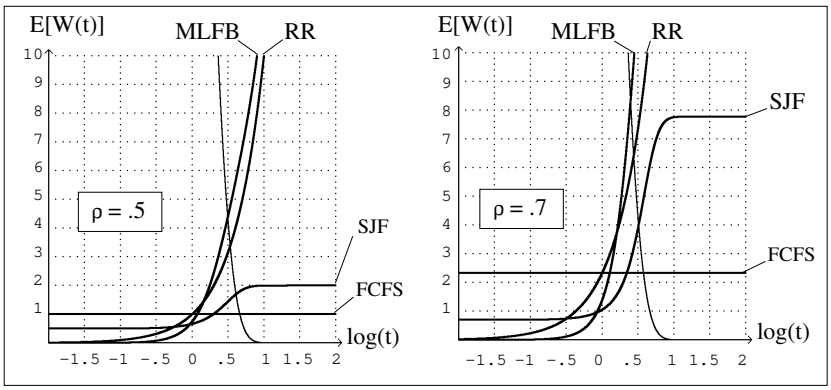
$$E[W(t)] = \frac{1}{\mu}\frac{\rho - (\lambda t + \rho)e^{-\mu t}}{(1 - \rho(1 - e^{-\mu t}))^2} + \frac{t}{1 - \rho(1 - e^{-\mu t})} - t.$$


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




# Die analytische Methode: Vergleich verschiedener Strategien

Graphische Darstellung der Ergebnisse

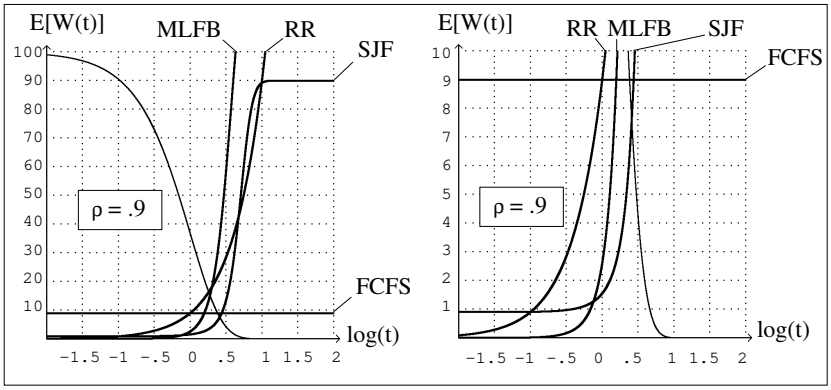



Wartezeit der Strategien *FCFS*, *SJF*, *RR* und *MLFB* bei 50% und 70% Auslastung der Bedienstation

Die dünn gezeichnete Kurve gibt an, für wieviel Prozent der Aufträge die Bedienzeit länger ist als der jeweilige Abszissenwert.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig

# Die analytische Methode: Vergleich verschiedener Strategien



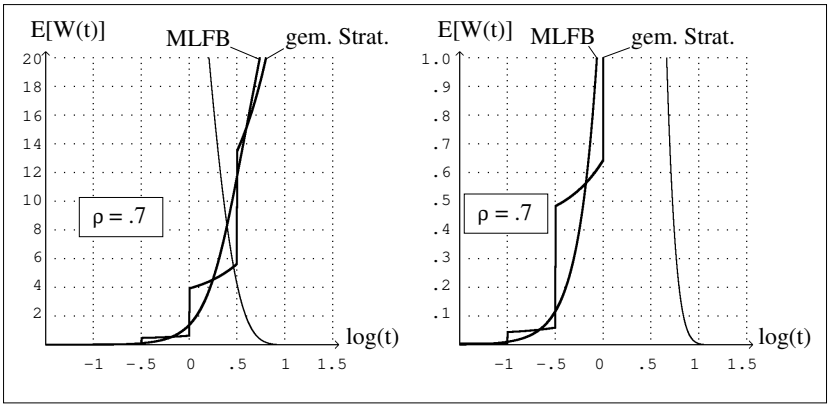

Wartezeit der Strategien *FCFS*, *SJF*, *RR* und *MLFB* bei 90% Auslastung der Bedienstation


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig




# Die analytische Methode: Gemischte Strategien

- Gemischte Strategien




*Gemischte* Strategie bei exponentieller Bedienzeitverteilung mit $a[0] = 0$, $a[i] = 10^{(i-4)/2}$ für $1 \le i \le 7$ und $a[8] = \infty$ unter ausschließlicher Verwendung von *FCFS* im Vergleich mit *MLFB*.

Die Auslastung ρ ist 0.7, Zeiteinheit ist die mittlere Bedienzeit. Die dünn gezeichnete Kurve gibt an, für wieviel Prozent der Aufträge die Bedienzeit länger ist als der jeweilige Abszissenwert.


Universität Erlangen-Nürnberg, IMMD IV, F. Hofmann
Reproduktion jeder Art oder Verwendung dieser Unterlage zu Lehrzwecken außerhalb der Universität Erlangen-Nürnberg ist ohne Genehmigung des Autors unzulässig