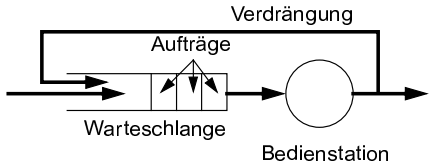
4 **Prozessorvergabe in Monoprozessoren**

4.1 **Die operationelle Methode**

Mehrere Aufträge (Prozesse) werden im Zeitmultiplex von einem Prozessor bearbeitet:



Frage: **Welchen Einfluß übt die Auswahl-(Zuordnungs-)Strategie auf Verweilzeiten und Durchsatz aus?**

Systembeschreibung bei operationeller Betrachtung:
Abarbeitung der Aufträge wird durch Warte- und Bedienfunktionen beschrieben.

Wartefunktion:

$$W_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls der Auftrag } P_i \text{ während des Intervalls} \\ & [t\Delta t, (t+1)\Delta t) \text{ auf Bedienung wartet,} \\ & \text{aber nicht bearbeitet wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bedienfunktion:

$$R_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls der Auftrag } P_i \text{ während des Intervalls} \\ & [t\Delta t, (t+1)\Delta t) \text{ bedient wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nebenbedingung 1

$$\forall i (1 \le i \le n \Rightarrow \exists t ((0 \le t < T \wedge (R_i(t) = 1)) \wedge \forall t (0 \le t < T \Rightarrow (W_i(t) R_i(t) = 0))))$$

Abgeleitete Begriffe

Gesamtwartezeit des Auftrags P_i:

$$W_i := \sum_{t'=0}^{T-1} W_i(t')\Delta t$$

Gesamtbedienzeit des Auftrags P_i:

$$R_i := \sum_{t'=0}^{T-1} R_i(t')\Delta t$$

Restbedienzeit von P_i zum Zeitpunkt t:

$$\vec{R}_i(t) := \sum_{t'=t}^{T-1} R_i(t')\Delta t$$

Von P_i zum Zeitpunkt t verbrachte Wartezeit:

$$\overleftarrow{W}_i(t) := \sum_{t'=0}^{t-1} W_i(t')\Delta t$$

Restbedienzeit der zum Zeitpunkt t wartenden Aufträge:

$$\vec{WR}(t) := \sum_{i=1}^{n} W_i(t)\vec{R}_i(t)$$

Bisherige Wartezeit der zum Zeitpunkt t bedienten Aufträge:

$$\overleftarrow{RW}(t) := \sum_{i=1}^{n} R_i(t)\overleftarrow{W}_i(t)$$

Mittlere Restbedienzeit für die wartenden Aufträge:

$$\vec{WR} := \frac{1}{T}\sum_{t'=0}^{T-1} \vec{WR}(t')$$

Mittlere bisherige Wartezeit der in Bedienung befindlichen Aufträge:

$$\overleftarrow{RW} := \frac{1}{T}\sum_{t'=0}^{T-1}\overleftarrow{RW}(t')$$

Analog werden $\overrightarrow{RW}$, $\overleftarrow{WR}$ und $\overrightarrow{RR}$ definiert.

Zahl der zum Zeitpunkt t wartenden Aufträge (= Warteschlangenlänge):

$$Q(t) := \sum_{i=1}^{n} W_i(t)$$

Mittlere Warteschlangenlänge:

$$E[Q] := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} Q(t)$$

Mittlere Wartezeit:

$$E[W] := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i$$

Mittlere Ankunftsrate:
(= 1/mittleres Ankunftsintervall)

$$\lambda := \frac{n}{T\Delta t}$$

Zahl der zum Zeitpunkt t im System befindlichen Aufträge:

$$N(t) := \sum_{i=1}^{n} (W_i(t) + R_i(t))$$

Mittlere Zahl der im System befindlichen Aufträge:

$$E[N] := \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} N(t)$$

Verweilzeit des Auftrags P_i:

$$U_i := \sum_{t=0}^{T-1} (W_i(t) + R_i(t))\Delta t$$

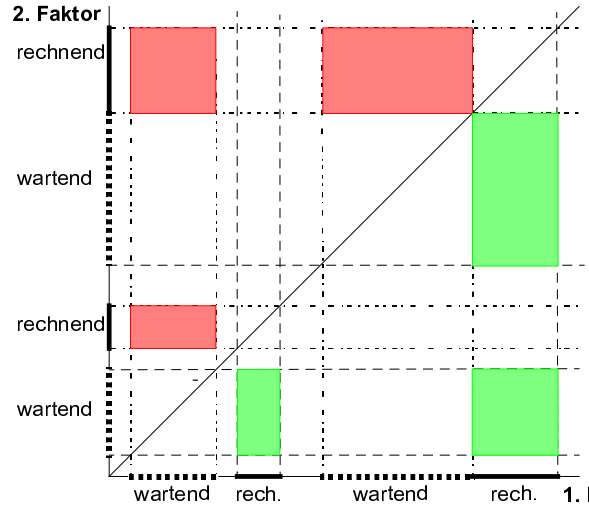
Mittlere Verweilzeit:

$$E[U] := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i$$

S4.1 **Satz**

1. $\overrightarrow{WR} = \overleftarrow{RW}$
2. $\overrightarrow{RW} = \overleftarrow{WR}$
3. $\overrightarrow{RR} = \frac{1}{2T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i(R_i + \Delta t)$
4. $\overleftarrow{RW} + \overrightarrow{RW} = \frac{1}{T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} W_i R_i$

Beweis zu $\overrightarrow{WR} = \overleftarrow{RW}$: Betrachtung eines einzelnen Prozesses

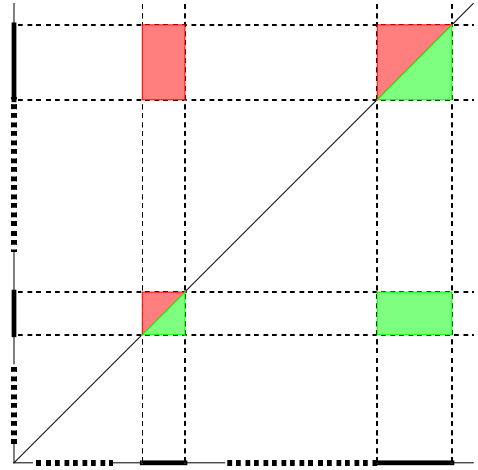


Linke Seite: Summe der roten Rechtecke

Rechte Seite: Summe der grünen Rechtecke

Aus Symmetrie-gründen sind beide gleich

Beweis zu $\overrightarrow{RR} = \frac{1}{2T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} R_i(R_i + \Delta t)$



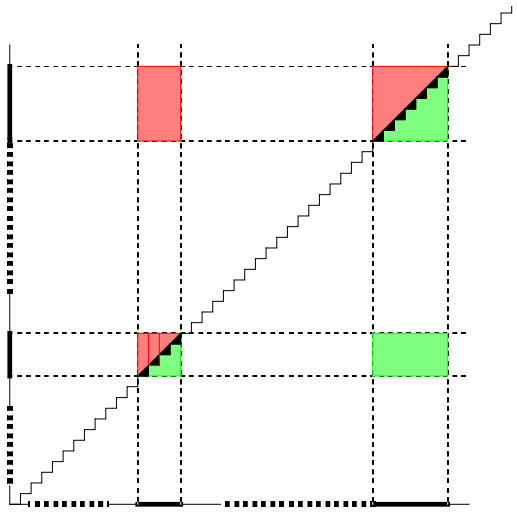
Linke Seite

Summe der roten Flächen

Im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$

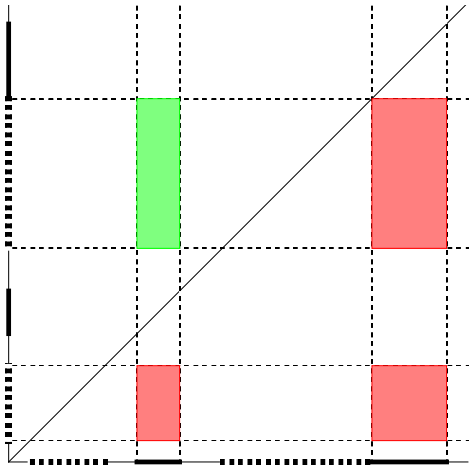
Summe der roten Flächen = Summe der grünen Flächen

genauer



Stufe = Δt

Beweis zu $\overleftarrow{RW} + \overrightarrow{RW} = \frac{1}{T\Delta t}\sum_{i=1}^{n} W_i R_i$



Linke Seite:

1. Summand = Summe der roten Flächen

2. Summand = Summe der grünen Flächen

S4.2

Theorem von Little

1. $E[Q] = \lambda E[W]$
2. $E[N] = \lambda E[U]$

Beweis:

Einfache Umformungen der Definitionen

Bezeichnungen

Ankunftszeitpunkt des Auftrags P_i

$$a_i := \min_{0 \le t < T} \{t | W_i(t) + R_i(t) \neq 0\}$$

Fertigstellungszeitpunkt des Auftrags P_i

$$e_i := \max_{0 \le t < T} \{t | R_i(t-1) = 1\}$$

Nebenbedingung 2

$$\forall i \forall t (0 \le t < T \Rightarrow (a_i \le t < e_i \Leftrightarrow (W_i(t) + R_i(t) = 1)))$$

S4.3

Kleinrock

Das System verfüge über eine einzige Bedienstation. Dann hat für alle Strategien, die

1. **nicht verdrängend sind (d. h.** $R\vec{W} = 0$**),**
2. **die Bedienstation nur unbenutzt lassen, wenn keine Aufträge im System sind und**
3. **Ankunfts- und Bedienzeiten nicht beeinflussen,**

die Größe $\sum_{i=1}^{n} R_i W_i$ **den gleichen Wert.**

Beweis:

1. $\vec{R}(t) := W\vec{R}(t) + R\vec{R}(t)$ **ist unter den gemachten Voraussetzungen ein sägezahnähnlicher Treppenzug, dessen Form unabhängig von der Zuordnungsstrategie ist.**
2. **Da nach Annahme** R_i **unabhängig von der Strategie ist, gilt dies wegen Satz 3.4.1 auch für** $R\vec{R}$
3. **Wegen 1. ist auch der Mittelwert** $\vec{R} = W\vec{R} + R\vec{R}$ **strategie-unabhängig und damit wegen 2. auch** $W\vec{R}$**. Aufgrund von Satz 3.4.1 gilt dies dann auch für** $R\overleftarrow{W}$**.**
4. **Nach Voraussetzung ist die Strategie nicht verdrängend, also** $R\vec{W} = 0$**.**

   Mit Satz 3.4.1 ergibt sich $RW = R\overleftarrow{W} + R\vec{W} = \frac{i}{T\Delta t} \sum_{i=1}^{n} R_i W_i$**, woraus wegen 3. die Behauptung folgt.**

S4.4

Satz: Minimierung der mittleren Verweilzeit bei nicht verdrängenden Strategien

In einem System mit einer Bedienstation, das zum Zeitpunkt 0 bereits alle Aufträge enthält (d. h. für alle i ist $R_i(0) + W_i(0) = 1$**) und das keine Verdrängung zuläßt, wird die mittlere Verweilzeit minimiert, wenn die Aufträge nach aufsteigenden Bedienzeitanforderungen abgearbeitet werden. Solche Vorgehensweisen werden als** *shortest job first (SJF)* **bezeichnet.**

S4.5 **Satz: Minimierung der mittleren Verweilzeit bei verdrängenden Strategien**

In einem System mit einer Bedienstation, das n Aufträge zu bearbeiten hat, minimiert die Strategie *preemptive shortest job first (PSJF)* die mittlere Verweilzeit, falls Verdrängung und Zuordnung von Aufträgen keine Zeit beanspruchen.

L4.1 **Lemma**

Eine Strategie S, die die mittlere Verweilzeit minimiert, erzeugt keine Leerstellen, d. h. in jedem Intervall $[t_1, t_2)$ ist ein Auftrag in Bearbeitung, falls während dieses Intervalls immer Aufträge im System sind.

L4.2 **Lemma**

Eine Strategie S, die U minimiert, erzeugt höchstens zu den Ankunftszeitpunkten a_i Verdrängungen.

Bezeichnung

Jedem Auftrag sei ein Zielzeitpunkt z_i zugeordnet, zu dem spätestens seine Fertigstellung erfolgen sollte.

S4.6 **Satz: Minimierung der maximalen Verspätung ohne Verdrängung**

Ein System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation, das zum Zeitpunkt 0 bereits alle Aufträge enthält und keine Verdrängung zuläßt, minimiert die maximale Verspätung $\max_i\{L_i \mid (L_i = e_i - z_i)\}$, wenn die Aufträge nach aufsteigender Zielzeit z_i abgearbeitet werden *(deadline scheduling, earliest deadline first, EDF)*.

S4.7 **Satz: Minimierung der maximalen Verspätung mit Verdrängung**

In einem System mit einer Warteschlange und einer Bedienstation wird $\max_i\{L_i \mid (L_i = e_i - z_i)\}$ minimiert, wenn zu jedem Zeitpunkt unter den im System vorhandenen Aufträgen einer mit kleinstem Zielzeitpunkt zugeordnet wird *(preemptive deadline scheduling, preemptive earliest deadline first, PEDF)*.

Beweis: S sei ein Ablaufplan gemäß PEDF

O. B. d. A. Numerierung so, daß $i < j \Leftrightarrow z_i < z_j \vee (z_i = z_j \wedge e_i < e_j)$

k sei kleinster Index mit L_k maximal

1) **Für alle i** $L_i \le L_k \Rightarrow e_i - z_i \le e_k - z_k \Rightarrow z_k - z_i \le e_k - e_i$
2) $i < k \Rightarrow z_i \le z_k \Rightarrow 0 \le z_k - z_i \le e_k - e_i \Rightarrow e_i \le e_k$

   $i \ne k$: $\Rightarrow e_i < e_k$
3) **Beh.: Teilsystem $P_1, P_2, \ldots, P_k$ abgearbeitet wie S ist in diesem Teilsystem ebenfalls eine Abarbeitung nach PEDF; es ist lediglich zu zeigen, daß in dem Teilsystem keine Lücken entstehen.**

   Nach Definition der Indizierung: $k < r \Rightarrow z_k < z_r \vee (z_k = z_r \wedge e_k < e_r)$

   Im ersten Fall wird P_r nur in Intervallen bearbeitet, während derer kein Auftrag des Teilsystems im System ist,

   im zweiten Fall hätte P_r eine größere Verspätung als P_k, kann also nicht eintreten.

Wegen der sägezahnförmigen Lastkurve wird unter jeder lückenfreien Zuordnung ein Auftrag frühestens zum Zeitpunkt e_k fertig. Wäre es ein anderer als P_k, so wäre seine Verspätung wegen der Konstruktion der Numerierung mindestens so groß wie L_k.